Durée de l'épreuve : 1h 30mn
Épreuve sans document. La calculette est autorisée (sans sa documentation).
Les exercices (encadrés) sont indépendants. Le barème (sur 60) est donné à titre indicatif.
Indiquer les réponses exclusivement sur ce document et aux endroits réservés à cet effet (ne pas écrire dans la marge)

Les logiciels DS3Win, PAC et Statistica ont été utilisés pour analyser les données.

Dossier DEFINITIONS : Description et Inférence (3 points)

1. Expliquer, en deux ou trois phrases maximum, en quoi consiste la distinction entre l'étape descriptive et l'étape inférentielle, lors de l'analyse statistique des données :
   L'étape descriptive consiste à analyser et décrire les données recueillies sur un ***échantillon****. La conclusion porte uniquement sur ces données observées. L'étape inférentielle consiste à évaluer s'il est possible de* ***généraliser au-delà de l'échantillon****,, à une population plus vaste (****population parente****), les conclusions de l'étape descriptive.*

2. Citer 2 statistiques inférentielles :
   T de Student, Khi², F de Fisher

Dossier RORSCHACH : Structures (7 points)

Source : Inspiré de Azoulay, Emmanuelli, Rausch de Traubenberg, Corroyer, & Rozencwajg (1999) - Les données normatives du Rorschach à l'adolescence, *Symposium "Normalcy and pathologies: the specificity of adolescence". XVIème congrès International du Rorschach et des méthodes projectives*. Amsterdam : 19-23 juillet.

Le test de Rorschach consiste en une dizaine de planches comportant chacune une tache d'encre différente. Chaque planche est présentée au sujet et ce dernier est invité à dire *"tout ce à quoi la planche lui fait penser"*.
Une recherche, portant sur 700 sujets, a visé à constituer une base de données normative des productions en présence des différentes planches. Ces données devraient servir ensuite de référence pour les utilisations individuelles de ce test. On recueille les verbalisations sur sept groupes d'âge (de 13 à 64 ans) composés chacun d'hommes et de femmes de 3 milieux sociaux différents.
On relève, pour chacune des 10 planches présentées, le nombre de kinesthésies (évocations d'objets en mouvement) données par le sujet.

On se demande dans quelle mesure la production de kinesthésies au Rorschach varie d'une planche à l'autre et selon l'âge, le milieu social et le sexe.

On ne précisera pas l'indice pour le facteur de groupe.

1. Indiquer quels sont les facteurs (ou VI) étudiés dans cette recherche :
   Sujet - $Sexe_2$ *-* Age_7*-* $Milieu_3$ *-* $Planche_{10}$

2. Indiquer quelle est la variable dépendante (VD) :
   Nombre de kinesthésies (évocations d'objets en mouvements) données par le sujet

3. Indiquer quels sont, parmi les facteurs :
- le facteur de groupe :
  Sujet
- le(s) G-facteur(s) :
  Sexe, Age, Milieu
- le(s) T-facteur(s) :
  Planche

4. Indiquer à l'aide des symboles d'emboîtement (<>) de croisement (∗) et de confusion(~) :
- la relation entre les G-Facteurs :
  $Sexe_2 * Milieu_3 * Age_7$.
- la formule du plan le plus riche :
  $Sujet <Milieu_3 * Age_7 * Sexe_2> * Planche_{10}$

Dossier LATERAL : De la description à l'inférence (16 points)

Source : Inspiré de *Fagard J. et Corroyer, D. (en révision) - Using a continuous index of laterality to determine how laterality is related to interhemispheric transfer and bimanual coordination in children.*

Cette recherche visait à étudier, en particulier, l'évolution du transfert interhémisphérique chez le jeune enfant. On s'intéresse ici à une partie des données, recueillies chez deux groupes d'enfants droitiers de 5 ans (a1) et 6 ans (a2). Ils ont à comparer, les yeux bandés, les textures de petits coussins. Chaque coussin est placé sur la paume de la main de l'enfant. Chaque enfant réalise plusieurs comparaisons de textures dans deux conditions : les deux textures sont présentées successivement, soit sur une main puis sur l'autre (condition croisée, notée c1), soit sur la même main (condition non croisée, notée c2).
On note, pour chaque enfant, le pourcentage d'erreurs dans chacune des deux conditions.

On fait l'hypothèse que, chez les jeunes enfants, la comparaison est plus difficile dans la condition croisée. En effet, dans cette condition, la comparaison nécessite un transfert interhémisphérique des informations tactiles recueillies pour qu'elles puissent être comparées. Or ce transfert interhémisphérique ne s'établit que progressivement au cours du développement.

On présente ci-dessous les données recueillies sur un sous-ensemble de 10 enfants :

	c1	**c2**
s1a1	30	20
s2a1	35	18
s3a1	40	22
s4a1	28	17
s5a1	27	23
s6a2	18	12
s7a2	15	22
s8a2	20	19
s9a2	21	20
s10a2	11	22

On considère qu'un effet est faible s'il est inférieur à 5 points de pourcentage, et important s'il est supérieur à 10 points de pourcentage.

1. Structures (3 points)

a. Citer au moins un facteur maintenu constant dans cette expérience :
Préférence manuelle : Droitier
Période du développement : Enfant

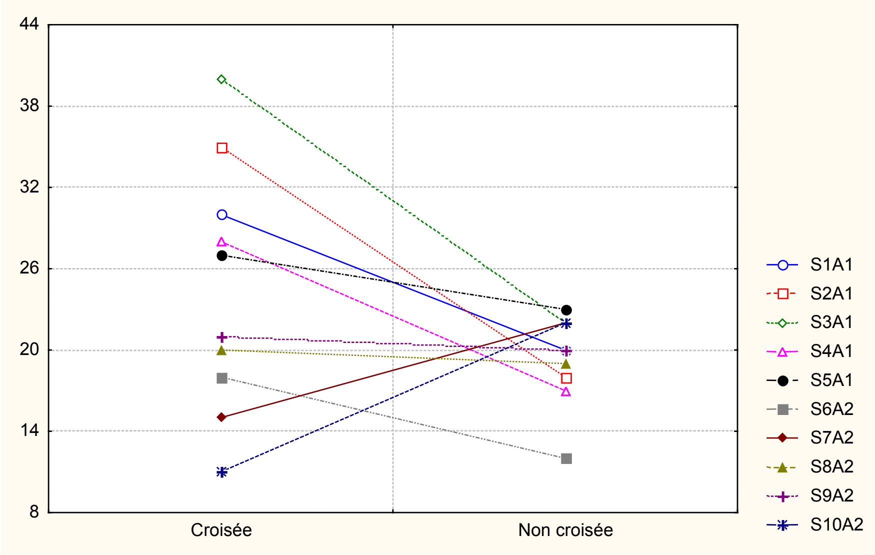
b. Indiquer le plan de recueil des données le plus riche :
$S_5 <A_2> * C_2$

c. Quelle est la variable dépendante ?
Pourcentage d'erreurs

2. Représentation graphique (2 points)

On s'intéresse aux <u>effets individuels</u> de la condition, croisée (c1) ou non croisée (c2), sur les 10 sujets (indépendamment de l'âge).

Commenter ci-dessous, le graphique de la page suivante de ce point de vue (on pourra s'aider également du tableau de données) :
Huit enfants sur 10 font plus d'erreurs en condition Croisée (c1) nécessitant un transfert interhémisphérique. Seuls deux enfants (s7 et s10) font plus d'erreurs en condition Non croisée (c2).
La dispersion est plus importante en condition Croisée (c1).



3. Analyse d'un effet (11 points)

On s'intéresse à l'effet du facteur Condition (croisée/non croisée) chez les sujets de 5 ans.

a. Indiquer l'expression formelle de cette question :
C/a1

b. Indiquer les valeurs du PDP :
10 17 18 11 4

c. Calculer l'effet observé, d_{obs} :
d_{obs} *=12 points de pourcentage*

d. Citer le nom abrégé et la formule d'un effet calibré adapté à cette question :
ECM = d / Sintra = |m – mu| / Sintra

e. On trouve EC = 2.10. Commenter brièvement ce résultat :
L'effet considéré apparaît ***important / fort / notable*** *si on considère l'effet calibré (EC = 2.10* **> 0.67***).*

f. On note tout d'abord que la valeur observée du test t de Student est 4.71 (d'où le seuil observé p < .005).
Par ailleurs, le logiciel PAC indique également : p(effet vrai > 8.09) = 0.90. Exprimer dernier ce résultat en langage naturel :
On a une garantie de 0.90 (90%) que l'effet du facteur condition chez l'ensemble des enfants de 5 ans soit supérieur à 8.09.

g. Rédiger une conclusion détaillée qui résumera toutes les informations recueillies et qui distinguera clairement les deux étapes, descriptive et inférentielle :
Chez ces 5 enfants droitiers de 5 ans, le pourcentage d'erreurs lors de la tâche de comparaison de textures est plus élevé en condition Croisée (c1) c'est-à-dire lorsque la tâche nécessite un transfert interhémisphérique, qu'en condition Non croisée (c2). Cet effet observé apparaît important, que l'on considère l'effet brut (12 points de pourcentage > 10) ou l'effet calibré (EC=2.10 > 0.67).

Concernant maintenant l'ensemble des enfants de 5 ans, sous réserve que cet échantillon de 5 enfants soit représentatif de l'ensemble des enfants de cet âge, on peut conclure à l'existence ***d'un effet parent de le même sens que l'effet observé*** *c'est à dire une plus grande difficulté de la tâche quand elle nécessite un transfert interhémisphérique* ***(t = 4.71, ddl = 4, p < .005)****. On a une bonne garantie que l'effet parent est supérieur à 8.09. On ne peut cependant* ***pas conclure à l'existence d'un effet parent important*** *(> 10)* ***(p(effet vrai > 8.09) = 0.90)****.*

Dossier REPRESENTATION : Variances Inter et Intra (3 points)

Soient les deux groupes de valeurs suivantes :

g1 (m1 = 16)	g2 (m2 = 8)
12 13 15 17 19 20	**4 6 8 9 10 11**

Attention ! Il n'est pas demandé de calculer les variances inter et intra dans les exercices ci-dessous.

1. Proposer une modification d'une valeur du groupe g1 de manière à diminuer la variance Inter (sans se préoccuper de la variance Intra). Justifier la réponse :
   Pour diminuer la variance Inter il faut ***rapprocher les moyennes des deux groupes****, donc* ***diminuer la moyenne de g1****. Il suffit pour cela de* ***diminuer une valeur de g1*** *(20 -> 19 par exemple).*

2. Proposer une modification d'une valeur du groupe g2 de manière à augmenter la variance Intra (sans se préoccuper de la variance Inter). Justifier la réponse :
   Pour augmenter la variance Intra il faut ***augmenter la dispersion à l'intérieur d'un groupe****. Pour augmenter la dispersion à l'intérieur du groupe g2, il suffit d'****éloigner une note de la moyenne du groupe*** *: augmenter une note supérieure à la moyenne (11 –> 12 par exemple) ou diminuer une note inférieure à la moyenne (6 -> 5 par exemple).*

3. Proposer de modifier deux valeurs du groupe g2 de manière à augmenter la variance Intra sans modifier la variance Inter. Justifier la réponse :
   Pour augmenter la variance Intra il faut augmenter la dispersion à l'intérieur du groupe. Pour ne pas modifier la variance Inter il ne faut pas changer la moyenne du groupe. La solution consiste à augmenter une valeur supérieure à la moyenne d'un ou plusieurs points et diminuer une valeur inférieure à la moyenne du même nombre de points (11 -> 13 et 4 -> 2 par exemple).

Dossier FICTIF : Protocoles Dérivés Pertinents (8 points)

Supposons que le tableau suivant rapporte les résultats d'une expérience pour laquelle la formule du plan de recueil des données était : S<A2>*B2*C2. On s'intéresse à différents effets, notés ci-dessous de manière formelle (A, B/c1, A/c1, A.B, B/c1a1, B.C). Pour chacun de ces effets :

1. Calculer, et reporter dans la colonne correspondante du tableau de droite, le protocole dérivé pertinent (PDP) permettant de calculer l'effet calibré et le T de Student.

2. Indiquer dans la dernière ligne du tableau ("D ou M") si l'effet moyen peut être obtenu, soit en calculant la moyenne générale du PDP (dans ce cas noter "M" dans la case du PDP correspondant), soit en calculant une différence de moyennes entre deux groupes du PDP (dans ce cas noter "D").

	b1c1	b2c1	b1c2	b2c2
s1a1	3	2	8	3
s2a1	2	4	4	2
s3a1	0	1	3	4
s4a2	0	2	1	1
s5a2	6	7	4	3
s6a2	2	2	3	1

	A	B/c1	A/c1	A.B	B/c1a1	B.C
	4	*-1*	*2.5*	*3*	*-1*	*4*
	3	*2*	*3*	*0*	*2*	*4*
	2	*1*	*0.5*	*-1*	*1*	*0*
	1	*2*	*1*	*-1*		*2*
	5	*1*	*6.5*	*0*		*2*
	2	*0*	*2*	*1*		*2*
D ou M	*D*	*M*	*D*	*D*	*M*	*M*

Dossier SOURIRE : Probabilités inverses (8 points)

Source : Toute ressemblance avec des données réelles serait fortuite...

Un sociologue s'intéresse à l'attitude des voyageurs du métro envers leurs voisins pendant le voyage. Il suit les voyageurs pendant 30mn et note leur comportement majoritaire en 3 catégories : Quelconque (Q), plutôt Souriant (S), ou plutôt Agressif (A).

L'hypothèse de ce sociologue étant qu'un certain groupe social (noté F) serait plus souriant et moins agressif qu'un autre groupe (noté I), il note donc également l'appartenance de la personne observée à l'un ou l'autre de ces deux groupes.

Il recueille des données sur 250 personnes, dont 200 personnes du groupe F (80%) et 50 personnes du groupe I (20%). Il constate que, sur 75 personnes plutôt souriantes, 50 appartiennent au groupe F (50/75 = 0.67) et 25 au groupe I (25/75 = 0.33).

1. Donner une expression formelle (sous la forme P(A/B)) des deux proportions calculées ci-dessus :
   $P(F / S) = 0.67$ *et* $P(I / S) = 0.33$

2. Le sociologue en conclut que les personnes du groupe F sont plus souriantes que celles du groupe I. Pourquoi sa conclusion est-elle erronée ?

Parce qu'il aurait fallu ***calculer et comparer deux autres proportions*** *: la proportion des personnes souriantes dans le groupe F (P(S / F) et la proportion des personnes souriantes dans le groupe I (P(S / I).*

3. Quelles proportions faut-il calculer pour comparer les deux groupes du point de vue de leur comportement social (donner des expressions formelles du type P(A/B)) ? Calculer ces proportions :

P (S / F) = 50 / 200 = 0.25 (25%)
P (S / I) = 25 / 50 = 0.50 (50%)

4. Répondre à la question posée :

Il y a proportionnellement plus de personnes souriantes dans le groupe I (50%) que dans le groupe F (25%), contrairement à la première conclusion du sociologue.

5. Le sociologue constate 5% de comportements plutôt agressifs parmi les personnes du groupe F contre 4% parmi les personnes du groupe I. Utiliser le théorème de Bayes, rappelé ci-dessous, pour calculer la proportion P(F/A). Indiquer le détail des calculs :

$$P(j/k) = \frac{P(j)\cdot P(k/j)}{\sum_J P(j)\cdot P(k/j)}$$

$$P(F/A) = \frac{P(F)\cdot P(A/F)}{P(F)\cdot P(A/F) + P(I)\cdot P(A/I)} = \frac{(200/250)\cdot(0.05)}{(200/250)\cdot(0.50)+(50/250)\cdot(0.04)} = \frac{(0.80)\cdot(0.05)}{(0.80)\cdot(0.05)+(0.20)\cdot(0.04)} = \frac{0.04}{(0.04)+(0.008)} = 0.83$$

6. Compte tenu des éléments fournis, présenter les données complètes sous la forme d'une distribution d'effectifs bivariée (tableau de contingence) :

	Q	S	A	Total
F	140	50	10	200
I	23	25	2	50
Total	163	75	12	250

Dossier DEPRESS : Test de typicalité (5 points)

On approxime la distribution des scores à une échelle de dépression de 2046 personnes tout-venant par une distribution normale de moyenne μ = 19.90, et de variance σ^2 = 25.

1. On se demande quel est, approximativement, le nombre de personnes dont le score est supérieur à x = 25 ? Commencer à développer les calculs nécessaires. Que manque-t-il pour mener ces calculs à terme ?

$$z=\frac{(25\text{-}19.90)}{\sqrt{25}}=\frac{5.10}{5}=1.02$$

Il manque une table de la loi normale réduite pour calculer p(Z > 1.02) = p(X > 25)…

2. On s'intéresse à un groupe de 36 personnes isolées socialement et à qui l'on fait passer la même échelle de dépression. La moyenne des scores de cet échantillon est de 22.30. On se demande si ce groupe de 36 personnes peut être qualifié d'atypique, du point de vue du score de dépression, par rapport à la population des 2046 personnes.

a. Calculer la moyenne et la variance de la distribution d'échantillonnage de la moyenne (DEM) :

Moy (M) = μ *= 19.90*

$$Var(M) = \frac{\sigma^2}{n}\frac{(N\text{-}n)}{(N\text{-}1)} = \frac{25}{36}\times\frac{(2046\text{-}36)}{(2046\text{-}1)} = \frac{25\times2010}{36\times2045} = \frac{50250}{73620} = 0.68256$$

b. On veut situer le groupe des 36 personnes par rapport à la population tout-venant, en procédant à un test de typicalité. Développer les calculs nécessaires, aussi loin que possible compte tenu des outils disponibles :

$$z=\frac{22.30\text{-}19.90)}{\sqrt{0.68256}}=2.90 \qquad p(Z > 2.90) = p(M > 22.30) = \ ?$$

c. Sachant que le calcul final donne P(M > 22.30) = .0055, répondre à la question sur l'atypicalité de ce groupe de 36 personnes du point de vue de la dépression :

Ces 36 personnes isolées socialement apparaissent en moyenne plus dépressives que la population des 2046 personnes. Ce groupe peut être qualifié d'atypique, du point de vue du score de dépression, par rapport à la population de référence (test de typicalité z =2.90 significatif au seuil p = 0 .0055 < .025).

Dossier BINAIRE : Formules (10 points)

L'ensemble des exercices de ce dossier vise à exprimer les formules des statistiques classiques (moyenne, variance…) dans le cas particulier de deux valeurs numériques (x1 et x2 ou m1 et m2), de même poids relatifs (f1 = f2 = ½). On suppose également que x2 (resp. m2) désigne toujours la plus élevée des deux valeurs.

1/ Calculs (3 points)

On considère tout d'abord un cas particulier où x1 = 10 et x2 = 18.
Calculer la moyenne (m), la différence (d = x2-x1), la variance (var), l'écart-type (ety), la variance corrigée (s²) et l'écart-type corrigé (s) de ces deux valeurs :

statistiques	résultats
m	14
d	8
var	16
ety	4
s²	32
s	5.66

Ces résultats pourront être utilisés pour vérifier les formules développées ci-après.

2/ Démonstrations (7 points)

On considère maintenant le cas général (x1 et x2 quelconques)
a. Sachant que m est à égale distance des deux valeurs x1 et de x2, exprimer les deux écarts à la moyenne (x1-m) et (x2-m) en fonction de d (différence entre ces deux valeurs, soit d = x2-x1) :

(x1-m) = - d /2 *(x2-m) = d/2*

b. la formule générale de la variance est var = Σ fi (xi - m)².
Développer cette formule, dans le cas particulier étudié ici (deux valeurs x1 et x2 équipondérées) en l'exprimant comme une somme de deux termes :

$$var=\frac{1}{2}\times\left(x1\text{-}m\right)^2+\frac{1}{2}\times\left(x2\text{-}m\right)^2$$

Exprimer alors la variance et l'écart-type comme une fonction de d (cf. a.) :

$$var=\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{d}{2}\right)^2+\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{d}{2}\right)^2=\left(\frac{d}{2}\right)^2=\frac{d^2}{4} \qquad ety=\sqrt{var}=\left|\frac{d}{2}\right|$$

De manière générale (n valeurs) la variance corrigée s² = (n/n-1) var. Exprimer la variance corrigée et l'écart-type corrigé de deux valeurs équipondérées comme une fonction de d :

$$s^2 = s^2=\frac{2}{1}\times\left(\frac{d}{2}\right)^2=\frac{d^2}{2} \qquad s=\left|\frac{d}{\sqrt{2}}\right|$$

c. Sachant que les résultats précédents sont valides pour deux valeurs numériques quelconques (donc pour deux moyennes, par exemple) et de même poids relatif, exprimer la variance inter, la variance inter corrigée et l'écart-type inter corrigé, comme une fonction de la différence entre les deux moyennes (m2 - m1), notée d :

$$V_{inter}=\left(\frac{d}{2}\right)^2 \qquad S^2_{inter}=\frac{d^2}{2} \qquad S_{inter}=\left|\frac{d}{\sqrt{2}}\right|$$

d. Il existe plusieurs effets calibrés pour évaluer la différence entre deux groupes indépendants du point de vue d'une variable numérique. L'effet calibré de Cohen (nommé souvent "d de Cohen") est égal à d / Sintra (d désigne, dans la formule, la différence entre les deux moyennes).

Rappeler la formule d'un autre effet calibré, noté ECG :

$$ECG=\frac{S_{inter}}{S_{intra}}$$

Compte tenu des résultats précédents, exprimer l'effet calibré de Cohen en fonction de l'effet calibré ECG (dans le cas de deux groupes équilibrés) :

$$\text{"d de Cohen"} = d/Sintra = \frac{d}{S_{intra}}=\frac{\sqrt{2}\times S_{inter}}{S_{intra}}=\sqrt{2}\times ECG$$